INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES
ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES

MAI 1991

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 4 heures)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

Nous notons f^n la n-ième itérée de f, c'est-à-dire :

$$f^0 = Id \quad ; \quad f^{n+1} = f \circ f^n \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

Nous dirons que x_0 est un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$. Plus généralement, nous dirons que x_0 est un point périodique de f s'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $f^q(x_0) = x_0$ et nous appellerons période de x_0 le plus petit entier $q \geqslant 1$ vérifiant cette égalité. Si, de plus, la dérivée de f^q en x_0 a une valeur absolue strictement inférieure à 1, nous dirons que x_0 est un point périodique attractif de f. Nous appellerons orbite d'un point périodique x_0 de période q, l'ensemble

$$O(x_0) = \left\{ f^i(x_0) \ , \ 0 \leqslant i \leqslant q - 1 \right\} ;$$

si x_0 est un point périodique attractif, nous dirons que $O(x_0)$ est une orbite périodique attractive.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

a) Montrer la relation suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \forall \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad (f^n)'(x) = \prod_{0 \leqslant i \leqslant n-1} f'(f^i(x)) \ .$$

b) Montrer que si x_0 est un point périodique attractif de f de période q, alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, q-1\}$, $f^i(x_0)$ est un point périodique attractif de période q dont l'orbite est celle de x_0.

Pour tout réel c, on définit une application

$$f_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{par} \qquad f_c(x) = x^2 + c \ .$$

Le but du problème est de montrer que chaque application f_c a au plus une orbite périodique attractive.

On notera de façon cohérente $(f_c)^n = f_c^n$.

PARTIE I

1) a) Montrer que si $c > \frac{1}{4}$, alors : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty$.

Quels sont les points périodiques de f_c ?

b) Montrer que si $c = \frac{1}{4}$, alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| > \frac{1}{2} \implies \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant \frac{1}{2} \implies \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = \frac{1}{2} \ .$$

A SUIVRE

Quels sont les points périodiques de f_c ? Quelles sont les orbites de ces points ?

2) a) Montrer que si $c < \frac{1}{4}$, f_c a deux points fixes α et β, vérifiant : $-\beta < \alpha < \beta$

et que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > \beta \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = +\infty$.

b) Tracer le graphe de f_{-1}.

3) a) Pour quelles valeurs de c a-t-on l'inclusion :

$$f_c([-\beta,\beta]) \subset [-\beta,\beta] .$$

Montrer que si cette inclusion n'est pas vérifiée, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f_c^n(0) = +\infty .$$

b) Pour quelles valeurs de c, le point α est-il un point périodique attractif ?

c) On suppose dans cette question que $c \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$.

Montrer que $\forall x \in]-\beta,\beta[$, $\lim_{n \to +\infty} f_c^n(x) = \alpha$.

Quels sont les points périodiques de f_c ? Lesquels d'entre eux sont attractifs ? Quelles sont les orbites périodiques attractives ?

PARTIE II

Nous supposons dans cette partie que x_o est un point périodique attractif de période q d'une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et nous posons :

$$g = f^q .$$

1) a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon[, \quad \lim_{n \to +\infty} g^n(x) = x_o .$$

b) En déduire que l'ensemble

$$U_{x_o} = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} g^n(x) = x_o\right\} \quad \text{est ouvert .}$$

Dans la suite de la partie II, on notera I_{x_o} la réunion des intervalles contenant x_o et contenus dans U_{x_o}.

2) Montrer que I_{x_o} est un intervalle ouvert.

Dans toute la suite de la partie II, on supposera que l'intervalle I_{x_o} est borné et on notera $I_{x_o} =]a,b[$.

3) Montrer les inclusions : $g(]a,b[) \subset]a,b[$ et $g(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$.

4) On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

a) Montrer que la dérivée de $h = g \circ g$ ne s'annule pas sur $]a,b[$ et que $h(a) = a$ et $h(b) = b$.

b) En déduire qu'il existe $a' \in]a,x_0[$ et $b' \in]x_0,b[$ tels que

$$h'(a') = h'(b') = 1 .$$

PARTIE III

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 vérifiant la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0 \implies 2 f'''(x) f'(x) - 3 f''(x)^2 < 0 ,$$

et on appellera point critique de f un point x tel que $f'(x) = 0$.

1) Montrer que les applications suivantes appartiennent à $\mathcal{E}$ et déterminer dans chaque cas l'ensemble des points critiques.

$$f : x \longrightarrow \sin x$$

$$f : x \longrightarrow e^{\lambda x} , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

$$f : x \longrightarrow x^2 + c , \quad c \in \mathbb{R} .$$

2) Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{E}$, il en est de même de $f \circ g$. En déduire que si $f \in \mathcal{E}$ et $n \geqslant 1$, alors $f^n \in \mathcal{E}$.

3) a) Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que si l'application $x \longrightarrow |f'(x)|$ a un minimum local en un point x_1, alors $f'(x_1) = 0$.

b) En déduire que si la dérivée de $f \in \mathcal{E}$ ne s'annule pas sur un intervalle $]a,b[$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| > \inf \left(|f'(a)|, |f'(b)| \right) .$$

4) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ a un point périodique attractif x_0 de période q, alors l'une des trois assertions suivantes est satisfaite :

- $\forall x \in]-\infty,x_0]$, $\lim_{n \to +\infty} f^{qn}(x) = x_0$,

- $\forall x \in [x_0,+\infty[$, $\lim_{n \to +\infty} f^{qn}(x) = x_0$,

- il existe un point critique y et un point x de l'orbite de x_0, tels que : $\lim_{n \to +\infty} f^{qn}(y) = x$.

PARTIE IV

1) On suppose $c \in [-2,0[$. Montrer que si x_0 et x_1 sont deux points périodiques attractifs de f_c, ils ont même orbite.

2) On suppose $c < -2$. Montrer que f_c n'a pas de point périodique attractif.

3) Plus généralement, montrer que si P est un polynôme de degré $d \geqslant 2$ tel que les racines de P' sont toutes réelles, l'application $x \longrightarrow P(x)$ a au plus d-1 orbites attractives (on commencera par exprimer la fraction rationelle $\frac{P''}{P'}$ en fonction des racines de P').

FIN